Ministerul Educaţiei şi Cercetării
Serviciul Naţional de Evaluare şi Examinare

Olimpiada Naţională de Matematică 2005

Etapa judeţeană şi a municipiului Bucureşti
5 martie 2005

CLASA A X-A

Subiectul 1. Se consideră numerele reale $a > 1$ şi $b > 1$. Să se demonstreze că există o funcţie $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ cu proprietăţile:
i) funcţia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(a^x) - x$ este strict crescătoare;
ii) funcţia $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = f(b^x) - x$ este strict descrescătoare;
dacă şi numai dacă $a > b$.

Subiectul 2.
Să se determine funcţiile $f : \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \to \mathbb{R}$ cu proprietăţile
a) $f(x, y) \cdot f(y, z) \cdot f(z, x) = 1$ oricare ar fi $x, y, z \in \mathbf{Z}$;
b) $f(x + 1, x) = 2$ oricare ar fi $x \in \mathbf{Z}$.

Subiectul 3.
Fie O un punct egal depărtat de vârfurile tetraedrului $ABCD$. Dacă distanţele de la O la planele BCD, ACD, ABD şi ABC sunt egale, să se arate că suma distanţelor unui punct M, interior tetraedrului, la cele patru plane este constantă.

Subiectul 4.
Fie $n \geq 3$ un număr natural. Determinaţi numărul funcţiilor $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ cu proprietatea că

$$f(f(k)) = (f(k))^3 - 6(f(k))^2 + 12f(k) - 6, \text{ pentru orice } k = 1, 2, \ldots, n.$$

Timp de lucru 3 ore
Toate subiectele sunt obligatorii